МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ имени И. Н. УЛЬЯНОВА

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ

ТОМ XXI ВЫПУСК IX

1966

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени И. Н. УЛЬЯНОВА

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ

ТОМ XXI ВЫПУСК IX

1966

АННОТАЦИЯ

Ученые записки содержат статьи сотрудников кафедры физики, относящиеся к трем основным направлениям: экспериментальная и теоретическая физика, методика преподавания. Сборник рассчитан на преподавателей и студентов физико-математических факультетов педагогических институтов, а также на учителей физики средних школ.

В. Г. МУРАДОВ, В. Я. ГАБЕСКИРИЯ

О СОСТАВЕ ПАРА НАД ТВЕРДЫМИ СПЛАВАМИ, БЛИЗКИМИ ПО СОСТАВУ К СОЕДИНЕНИЯМ CaSi И Ca_2Pb

В работе одного из авторов [1] было сделано предположение, что при сублимации твердых бинарных сплавов Ca, Si и Ca, Pb, близких по составу к наиболее прочным соединениям CaSi и Ca_2Pb, в газовую фазу переходят не только атомы компонентов сплава, но и молекулы этих соединений.

Для проверки выдвинутой гипотезы нами исследован состав пара двух образцов Ca, Si (56 и 62 вес. % Ca) и двух образцов Ca, Pb (66,5 и 70,8 *ат.* % Ca) в интервале температур от 400 до 850°C на масс-спектрометре МИ-1305. Испарение осуществлялось из цилиндрического тигля, сделанного из нержавеющей стали 1Х18Н9Т, нагреваемого вольфрамовой печью сопротивления. Температура определялась по току нагревателя печи, который градуировался специально на отдельном вакуумном посту с помощью хромель-алюмелевой термопары. Условия съемки масс-спектрограммы были следующие: напряжение ионизации менялось от 40 до 70 *в*, ток эмиссии катода 1,5 *ма*, ускоряющее напряжение 2 *кв*. Во время опытов давление в области ионного источника было $(2—3) \cdot 10^{-6}$ *тор*, а в области анализатора $(7—8) \cdot 10^{-7}$ *тор*.

Расшифровка снятых масс-спектрограмм показала, что из твердых образцов Ca, Si в исследованном температурном интервале сублимируют только атомы кальция. При этом отношение ионного тока атомов кальция к фону составляло более 1000. Следовательно, пока можно утверждать, что если и присутствуют в газовой фазе молекулы CaSi, то в количестве не более 0,1 %. Однако следует отметить, что проведенные эксперименты были достаточно далеки от равновесных условий. Поэтому их пока можно рассматривать как ориентировочные.

При изучении состава пара над твердыми образцами Ca, Pb уверенно удалось зафиксировать только ионные токи изотопов свинца. При этом отношение $\frac{I(Ca_2Pb)}{I(Pb)} < 0{,}01\%$. Отметим, что изученные образцы были частично окислены, так как на спектограмме были четко зафиксированы ионные пики, соответствующие окислам PbO и PbO_2. Атомы кальция обнаружить не удалось, что кажется очень странным, так как проведенный спектральный анализ конденсата показал в нем наличие большого количества кальция.

Таким образом можно утверждать, что вопрос о существовании молекул $CaSi$ и Ca_2Pb в газовой фазе остается пока открытым, так как четко выделить присущие им ионные пики на общем фоне в условиях наших опытов не удалось.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мурадов В. Г., Гельд П. В., Ученые записки Ульяновского государственного педагогического института, **20**, вып. 4, 116, 1965.

В. Г. МУРАДОВ, О. Н. МУРАДОВА

ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ОТСЧЕТА ВРЕМЕНИ В ЭФФУЗИОННЫХ ОПЫТАХ БЕЗ ПРИМЕНЕНИЯ ЗАТВОРА

При измерении упругости паров по методу Кнудсена для точного отсчета времени эффузии обычно используют различные конструкции затворов, перекрывающих молекулярный пучок в процессе разогрева и охлаждения печи [1]. Такие устройства достаточно сложны в изготовлении, хотя обеспечивают высокую точность отсчета времени эффузии (порядка 1—2% при экспозиции в 10 минут). Покажем, что если использовать форсированный разогрев и быстрое охлаждение печи, обладающей небольшой тепловой инерцией, то можно обойтись без применения затворной системы. Для этого необходимо, чтобы систематическая ошибка, связанная с дополнительным напылением исследуемого вещества на приемник в период разогрева и охлаждения печи, была не больше общей ошибки эффузионного метода, составляющей обычно 15—20%.

Рассматриваемая погрешность определяется несколькими независимыми факторами:

1) соотношением между временем разогрева и охлаждения печи (τ_1) и временем основной экспозиции (τ_0), когда температура (T_0) поддерживается строго постоянной;

2) скоростью разогрева и охлаждения печи;

3) природой вещества, т. е. зависимостью упругости паров исследуемого образца от температуры.

Рассмотрим влияние каждого из этих факторов, используя экспериментальные данные по упругости паров над системами Ca—Si, Ca—Pb и Ca—Sn [2]. При этом ограничимся рассмотрением только таких экспериментальных точек, которые получены при малом времени эффузии τ_0 (10—30 мин.), так как легко понять, что с рос-

том τ_0 ошибка в отсчете интервала времени эффузии будет быстро уменьшаться. Интересующие нас экспериментальные данные собраны в таблице 1.

Таблица 1

К расчету ошибки напыляемой на приемник массы в эффузионных опытах без применения затворной системы

№ п. п.	τ_1, мин.	τ_0 мин.	$\frac{\tau_1}{\tau_0}$, %	$\frac{dT}{d\tau}$ $\frac{град.}{мин.}$	T_0, °K	$lgP(ммHg) = A - \frac{B}{T}$		m_1/m_0, % при $\Delta\tau = 1$ мин.		
						A	B	для τ_1 мин.	для $(\tau_1 - 1,5)$ мин.	для $(\tau_1 - 2,5)$ мин.
1	5,5	30	18	12	1223	8,35	12870	11,6	6,6	4,2
2	5,5	24	23	17	1165	13,04	18150	10	3,8	1,9
3	5,5	10	55	17	1164	9,78	13150	28,6	13.6	5,1
4	5,5	10	55	17	1164	10,38	15800	29,7	14,7	6,3
5	5,5	30	18	13	1163	9,78	13150	10,3	5.3	2,7
6	7,5	15	50	12	1148	11,18	15050	20,4	10,4	5,9
7	4,5	20	22,5	48	1111	11,02	14890	10.9	3,4	0,6
8	8,5	30	28	6	1088	11,18	15050	12.2	7,2	4,6
9	3,5	14	25	63	1080	6,81	8800	14	3.3	0,6
10	4,5	30	15	27	1075	10,5	13900	7,9	2,9	0,9
11	4,5	30	15	27	1075	8,24	12800	7,9	2,9	0,9
12	4,5	17	26,5	30	1075	7,36	9730	14.7	5.9	1,8
13	5,5	25	22	5	1025	6,81	8800	16,1	10,1	6,6
14	4,5	25	18	27	920	8,29	9000	10.8	4.8	1,1
15	3,5	20	17,5	73	903	8,77	9480	8.7	1.2	0,1

В пятом столбце таблицы 1 приведены средние скорости разогрева печи $\left(\frac{dT}{d\tau}\right)$, измеренные в последние две минуты перед достижением заданной температуры T_0. Скорость охлаждения печи во всех опытах была порядка 80—120 град/мин.

Согласно формуле Кнудсена для эффузионного метода [1], систематическая ошибка, допускаемая при измерении количества напыленной массы на приемник без использования затвора, запишется следующим выражением:

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{\sqrt{T_0}\int\limits_0^{\tau_1} \frac{P}{\sqrt{T}} d\tau}{P_0 \tau_0} \qquad (1)$$

Даже если принять, что температура (T) меняется в период разогрева и охлаждения печи со временем (τ) по линейному закону, выполнить точное интегрирование в соотношении (1) представляется очень трудоемкой работой. Однако, разбив время разогрева и охлаждения печи τ_1 на достаточно небольшие интервалы $\Delta\tau$, внутри которых упругость паров (P) изменяется незначительно, можно приближенно рассчитать отношение (1), заменив точное интегрирование суммированием, т. е.

$$\frac{m_1}{m_0} \approx \frac{\Delta\tau\sqrt{T_0}}{\tau_0 P_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{\sqrt{T_i}} \qquad (2)$$

Анализ экспериментальных данных показал, что наиболее разумно выбрать $\Delta\tau = 1$ мин. Переход к $\Delta\tau = 0{,}1$ мин. уменьшает искомую величину $\left(\frac{m_1}{m_0}\right)$ на 20—25% (таблица 2), но резко увеличивает объем вычислительных работ.

Таблица 2

Результаты расчета $\left(\frac{m_1}{m_0}\right)$ при разных $\Delta\tau$ для случая № 12 из таблицы 1.

$\Delta\tau$ мин.	$\frac{m_1}{m_0}$, %
1	14,7
0,5	13,2
0,1	11

Результаты вычислений отношения $\left(\frac{m_1}{m_0}\right)$ по формуле (2) при $\Delta\tau = 1$ мин. приведены в седьмом столбце таблицы 1. В 8-м и 9-м столбцах этой же таблицы указаны погрешности, рассчитанные без учета 1,5 и 2,5 последних минут разогрева (охлаждения) печи перед достижением установившейся температуры T_0.

Анализируя полученные результаты вычислений $\left(\frac{m_1}{m_0}\right)$ для разных условий (таблица 1), можно прийти к следующим выводам:

1) Основное влияние на величину $\left(\frac{m_1}{m_0}\right)$ оказывает отношение $\left(\frac{\tau_1}{\tau_0}\right)$. Значительно слабее исследуемая погрешность зависит от других факторов, т. е. скорости разогрева (охлаждения) печи и природы вещества.

2) При выборе основного времени экспозиции (τ_0) не менее 15 мин. систематическая погрешность, вносимая в результаты эффузионных опытов, будет лежать в пределах случайной ошибки, т. е. не превышать 20%.

3) Эта систематическая погрешность практически полностью устраняется, если расчет упругости паров при

малых экспозициях (15—30 мин.) провести в предположении, что эффузия при заданной температуре T_0 происходила не τ_0, а $(\tau_0+2{,}5)$ мин.

В заключение отметим, что исследованная ошибка будет в действительности еще меньше за счет того, что в период разогрева печи упругость паров всегда меньше равновесной, принятой нами при расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Несмеянов Ан. Н., Давление пара химических элементов, изд. АН СССР, М., 1961.

2. Мурадов В. Г., Кандидатская диссертация, г. Ульяновск, 1965.

А. И. СЛЕПЦОВ

ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ БАРИЕВЫХ И СВИНЦОВОСИЛИКАТНЫХ СТЕКОЛ

Большинство научных данных [1, 2, 3, 4] в настоящее время свидетельствуют о том, что при температурах ниже 600°С силикатные стекла обладают преимущественно ионной проводимостью. Однако некоторые типы стекол (бариевые, ванадиевые и некоторые другие) [5, 6] обнаруживают проводимость, свойственную электронным полупроводникам. Суждения о характере проводимости бесщелочных стекол до сих пор противоречивы. Так, например, Штраус [7] утверждает ионную проводимость в свинцовосиликатных стеклах, обусловленную незначительным количеством примеси щелочи. Павлова Г. А. [8] утверждает наличие электронной проводимости в этих стеклах. Незначительные (до 4 *мол.* %) примеси ионов щелочного металла в сложных стеклах [9] не могут изменить электронный характер проводимости.

В последнее время возрос интерес к изучению силикатных соединений в кристаллической фазе. Согласно ряду авторов [10,11], соединения в аморфной и кристаллической фазах имеют ряд отличительных особенностей: величина проводимости в кристаллической фазе для щелочных и некоторых других силикатов значительно ниже, чем в аморфной, а влияние состава на электропроводность слабее выражено в кристаллической фазе. Кроме того, было установлено [10], что характер кристаллизации (величина размеров кристаллов) мало сказывается на величине электропроводности. Все это говорит в пользу большей роли электронной проводимости в кристаллическом веществе.

В настоящей работе исследовалась зависимость объемной проводимости от температуры в бариевых и свинцовосиликатных стеклах. Бариевые соединения (28 *мол.*

% BaO) были предварительно закристаллизованы, свинцовые стекла исследовались в аморфной фазе. Образцы, предназначенные для исследований, подвергались испытаниям на «формовку». Было установлено, что до температуры 450°C и плотности тока $\sim 10^{-5}$ а/см^2 сопротивление их в постоянном режиме не зависит от времени. Выполняемость закона Ома и независимость сопротивления от времени дополнительно подтверждают преобладание электронной проводимости указанных стекол. Измерения велись по обычной схеме с охранным кольцом компенсационным методом. В качестве индикатора в импульсном режиме использовался осциллограф ИНО-1 (С1—4). В постоянном режиме использовался зеркальный гальванометр. Импульсы прямоугольной формы имели частоту следования 25 *гц* и напряжение 1 *кв*.

Исследуя зависимость проводимости $BaO \cdot SiO_2$ от температуры в импульсном режиме (рис. 1), легко видеть,

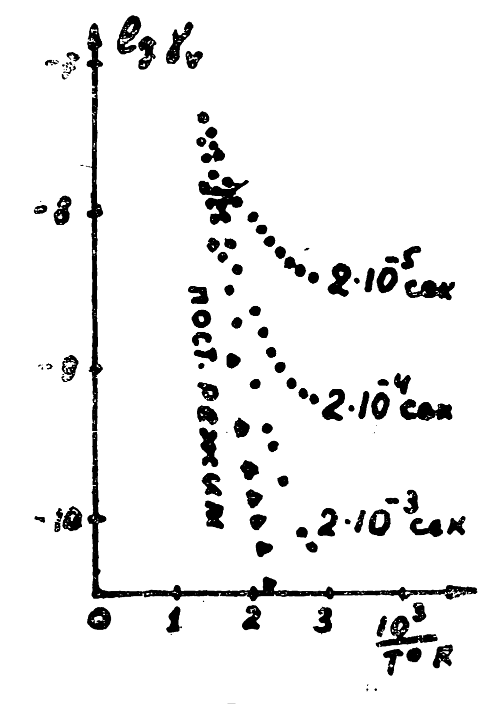


Рис. 1

что характер этой зависимости различен для различных времен. Меньше всего температура сказывается на малых временах ($2 \cdot 10^{-5}$сек.), что указывает на слабую зависимость быстрых состояний от температуры.

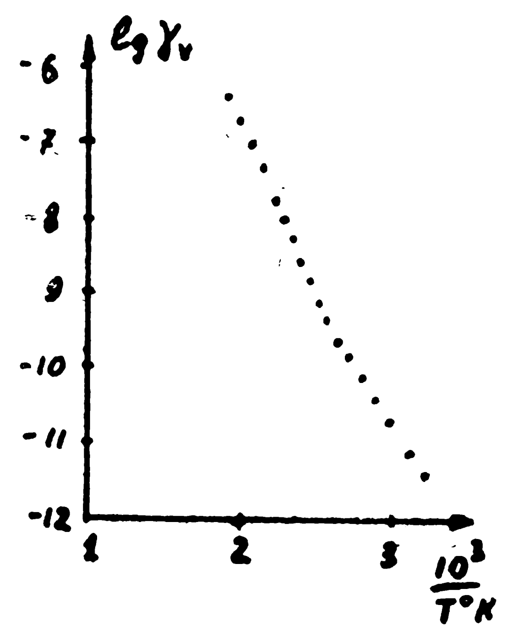


Рис. 2

Интересна зависимость $\lg \gamma_v = f(1/T)$ для свинцового стекла (рис. 2). Легко видеть, что график распадается на 2 прямолинейных участка, соответствующих энергиям активации 0,65 *эв* и 0,69 *эв*. Можно предполагать, что в данном случае освобождались лишь неглубоко расположенные состояния. Не исключена возможность, что при более высоких температурах обнаружатся и более глубокие энергетические состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беркс Дж. Б. и Шулман Дж. Прогресс в области диэлектриков, т. 2. Госэнергоиздат, М.—Л., 1963.

2. Мюллер Р. Л., ЖТФ, **25,** № 2, № 9, № 11. 1955.

3. Остроумов Г. ЖОХ, **19,** 407, 1949.

4. Павлова Г. А., Труды ЛТИ им. Ленсовета, № 46, 56, 1958.

5. Мазурин О. В., Павлова Г. А., Лев Е. Я., Леко Е. К., ЖТФ, **27,** № 12, 1957.

6. Baynton P. L., Rawson H., Stanworth I. E. I. Electrochem. Soc., **104,** 237, 1957.

7. Strauss S. W., Moore D. G., Harrison W. H., Richards L. E. Iourn. N B S 56, № 3, 1956.

8. Павлова Г. А., Изв. ВУЗ, химия и хим. технолог. № 5, 1956.

9. Евстропьев К. К. Опт. мех. пром., № 4, № 5, № 6, 1963.

10. Кузнецов А. Я. ЖФХ, **33,** 1726, 1956.

11. Мазурин О. В. и др. Изв. ВУЗ, № 1, 125, 1964.

В. А. ГУБИЧЕВ

ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЦ И УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА В КУРСЕ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ*

Волновые свойства частиц так же, как корпускулярные свойства волн (полей), представляют наиболее фундаментальные свойства материи. Не во всех вопросах этой проблемы в современной физике достигнута достаточно предельная ясность, но основы проблемы разработаны достаточно хорошо и нашей задачей в курсе общей физики является выработка отчетливых представлений об этих основах в сознании обучающихся.

Основным законом, описывающим волновые свойства частиц, является уравнение Шредингера. Это опытный закон, играющий в данном разделе физики такую же роль, какую второй закон Ньютона играет в динамике. Доказательством его справедливости является совпадение выведенных из него следствий с опытными фактами.

Собственно, с этого утверждения и начинаются трудности при изучении уравнения Шредингера. Вся подготовительная работа, заключающаяся в описании догадки Луи-де-Бройля о волновых свойствах частиц и опытов, подтверждающих эту догадку, воспринимается с доверием, но когда записывается уравнение Шредингера и объявляется, что это опытное уравнение, то доверию приходит конец и никакая апелляция ко второму закону Ньютона здесь не помогает. Действительно, нетрудно представить себе опытное происхождение такого простого соотношения, как второй закон Динамики, и совершенно невозможно представить это по отношению к уравнению Шредингера — этому сложному уравнению.

Положение усугубляется еще и тем, что, как правило, студенты к этому времени не ознакомлены с волновым уравнением в курсе математики. Не способствует отчет-

ливому усвоению идей и то, что далеко не во всех учебниках и, соответственно, лекциях четко разграничено известное и неизвестное о ψ — функции — этой загадочной функции, которая характеризует состояние частицы, а сама остается неведомой. У студента при этом часто остается впечатление, что только ему по какой-то причине остается неясным смысл этой функции, а другим это известно. Появляется неверие в свои силы.

Зная об этих трудностях, некоторые преподаватели пединститутов, даже на физических отделениях, при изучении корпускулярно-волнового дуализма материи ограничиваются только описанием опытов, тем более, что знание ψ — функции и уравнения Шредингера не предусматривается программой. Удивительное дело! Студенты технических вузов должны знать об этом, а вот в программе курса общей физики на физических отделениях пединститутов знакомство с уравнением Шредингера не предусмотрено!

Не подлежит, однако, сомнению, что общие принципы корпускулярно-волновой теории столь важны, что представляется совершенно необходимым более широкое знакомство с элементами этой теории еще в курсе общей физики. А указанных выше трудностей можно избежать, если не записывать сразу уравнение Шредингера в общем виде, заявляя, что это волновое уравнение, а показать, что оно является волновым, опираясь на знания о волнах, полученных в предыдущих разделах курса физики. При этом рекомендуется придерживаться следующего плана:

а) Описание гипотезы де-Бройля о волновых свойствах частиц и обоснование формулы де-Бройля $\left(\lambda = \frac{h}{mv}\right)$ на основе пропорциональности массы и энергии.

б) Экспериментальное подтверждение волновых свойств частиц в опытах Девиссона и Джермера, Тартаковского и др. Не забыть сказать, что из этих опытов можно определить длину волны частицы и что она совпадает с длиной волны, предсказанной де-Бройлем, что является еще одним подтверждением справедливости его идей.

в) (Основной пункт, из-за него и статья писалась). Если в механике, электромагнетизме при исследовании волн известно, какая величина совершает колебания: в

звуковой волне — это давление воздуха, в электромагнитной — напряженности электрического и магнитного полей и т. д., то природа волнового процесса, сопровождающего движение частиц, неизвестна. Какая физическая величина здесь совершает колебания неизвестно. Однако опыты показывают наличие дифракционных максимумов и минимумов, значит есть какая-то волна и есть величина, совершающая колебания. Эту неизвестную величину обозначили буквой ψ и назвали волновой функцией или ψ — функцией.

Все волны, распространяющиеся в одном направлении, описываются одинаковыми уравнениями. Для механической волны, распространяющейся вдоль оси x, таким уравнением будет:

$$y = y_0 \operatorname{Sin} \omega \left(t - \frac{x}{v} \right),$$

для электромагнитной:

$$E = E_0 \operatorname{Sin} \omega \left(t - \frac{x}{v} \right); \qquad H = H_0 \operatorname{Sin} \omega \left(t - \frac{x}{v} \right).$$

По аналогии, волновое уравнение для частицы, движущейся вдоль оси x, запишется в виде:

$$\psi = \psi_0 \operatorname{Sin} \omega \left(t - \frac{x}{v} \right).$$

Дважды дифференцируя это уравнение по x, получаем:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\psi_0 \frac{\omega^2}{v^2} \operatorname{Sin} \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

или

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \psi = 0$$

Это волновое уравнение для движущейся частицы, т. е. уравнение Шредингера, его легко привести к обычному виду, если учесть, что:

$$\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \text{а} \quad \lambda = \frac{h}{mv}, \qquad \text{тогда}$$

$$\frac{\omega^2}{v^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \frac{4\pi^2 m^2 v^2}{h^2} = \frac{8\pi^2 m}{h^2} E_к.$$

$E_к$ — кинетическая энергия частицы.

После подстановки последней формулы уравнение волны приобретает вид:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E_к\psi = 0$$

Это уравнение Шредингера для стационарного одномерного движения свободной частицы.

Если частица движется в силовом поле, то ее общая энергия E есть сумма потенциальной и кинетической энергии и следовательно:

$$E_к = E - U,$$

где U — потенциальная энергия.

Произведя эту подстановку, получаем уравнение Шредингера в более общем случае:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - U)\psi = 0$$

После получения этого уравнения совершенно естественно воспринимается обобщение его для случая частицы, движущейся произвольно:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - U)\psi = 0$$

Приведенные рассуждения не следует рассматривать как вывод уравнения — это преобразование волнового уравнения, данного в интегральном виде (данного опытным путем), к дифференциальному виду. Такой подход облегчает недостаточно эрудированному в математике студенту понять смысл уравнения Шредингера, а в дальнейшем помогает и в выявлении физического смысла ψ — функции.

д) Далее традиционным методом (поэтому он не описывается подробно), путем сравнения оптических дифракционных картин и картин дифракции электронов можно показать, что, хотя физический смысл самой ψ— функции неизвестен, квадрат модуля ψ — функции представляет вероятность нахождения частицы в месте с координатами x, y, z в момент времени t, показывая таким образом, что ψ — функция имеет статистический характер.

Н. П. ГРИФЦОВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ В ЭЛЕМЕНТАРНОМ ИЗЛОЖЕНИИ

В наш век — век основания космоса большой интерес учащихся вызывает динамика полета ракеты. Однако предусмотренный программой средней школы материал не дает возможности провести соответствующие, хотя бы приближенные расчеты, так как они связаны со специальным разделом механики — динамикой точки переменной массы, не проходимым в школе.

Этот раздел довольно труден, но отдельные важные вопросы нам представляется возможным рассматривать во внеклассной работе, опираясь на знания учащихся по физике и математике, не выходящие за рамки школьной программы.

Данная статья представляет собой несколько переработанную и сокращенную лекцию, прочитанную нами в школе юных физиков при Ульяновском techинституте.

I. Понятие точки переменной массы

В механике Ньютона массы движущихся тел считаются при их движении постоянными (в некоторых случаях рассматривается изменение массы скачком на некоторую величину. Примером может служить выстрел из орудия, когда масса последнего уменьшается на величину массы снаряда).

Однако в природе, технике многочисленны случаи, когда масса движущихся тел меняется непрерывно вследствие отделения от них частиц, или, наоборот, присоединения.

Такие тела называют телами **переменной массы.** Для них масса является непрерывной функцией времени:

$$m = m\ (t)$$

Приведем несколько примеров таких тел

1. При работе магнитофона масса одной кассеты непрерывно уменьшается, а другой — увеличивается.

2. Масса айсберга, плавающего в море, уменьшается по мере таяния льда или увеличивается при его намораживании.

3. При поднятии якоря масса свисающего участка цепи непрерывно уменьшается, при опускании — увеличивается.

4. Масса ракеты при работе двигателей непрерывно уменьшается за счет отбрасывания продуктов сгорания.

Можно привести целый ряд примеров движения тел переменной массы. Даже наша Земля, вследствие падения на нее метеоритов, непрерывно увеличивает свою массу.

Впервые уравнения движения тел переменной массы были получены выдающимся русским ученым И. В. Мещерским в 1897 г. Им фактически был создан новый раздел механики — теория движения тел переменной массы, являющейся научной основой современной ракетодинамики.

Мы будем рассматривать точку переменной массы, под которой будем понимать материальную точку, в которой сосредоточена масса всего тела, изменяющаяся непрерывно по некоторому закону

$$m = m(t)$$

Любое тело можно рассматривать как материальную точку, если его размерами по сравнению с проходимыми расстояниями можно пренебречь.

2. Уравнение движения точки переменной массы (уравнение Мещерского)

Перед выводом уравнения необходимо ознакомить учащихся с теоремой об изменении количества движения механической системы, которая имеется в любом учебнике физики. Эту теорему можно сформулировать следующим образом: **изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов всех действующих на тела системы внешних сил за тот же промежуток времени.**

Математическая запись:

Если обозначим количество движения системы в начальный момент времени $\overline{Q}_0$, а через время Δt—$\overline{Q}_1$, то

$$Q_1 - \overline{Q}_0 = \sum \overline{F}^e \Delta t \qquad (1)$$

Применим эту теорему к выводу уравнения Мещерского.

Пусть точка, масса которой изменяется с течением времени, в момент времени $t_0=0$ имела массу m и скорость $\overline{V}$ по отношению к Земле. Во время движения на нее действует результирующая внешних сил $\overline{F}_1^e$.

За время Δt к этой точке присоединяется частица массы Δm, имеющая в момент присоединения скорость по отношению к Земле $\overline{U}$ и на нее действует результирующая внешних сил $\overline{F}_2^e$.

Будем рассматривать эти две массы как одну систему. Тогда масса системы не меняется, и можем применить теорему (1):

Количество движения этих масс в момент $t_0=0$:

$$\overline{Q}_0 = m\overline{V} + \Delta m\overline{U}$$

После присоединения массы Δm скорость движущейся точки изменится на величину $\Delta\overline{V}$ и обе массы будут двигаться уже с общей скоростью $\overline{V}+\Delta\overline{V}$.

Количество движения в этом случае:

$$\overline{Q}_1 = (m + \Delta m)(\overline{V} + \Delta\overline{V})$$

Применяя теорему (I), получим:

$$m\overline{V} + \Delta m\overline{V} + m\Delta\overline{V} + \Delta m\Delta\overline{V} - m\overline{V} - \Delta m\overline{U} =$$
$$= (\overline{F}_1^e + \overline{F}_2^e)\Delta t,$$

учитывая, что присоединяемая масса Δm, а также изменение скорости $\Delta\overline{V}$ величины малые, можем пренебречь их произведением. Приведя подобные члены $m\overline{V}$ и $-m\overline{V}$ и сгруппировав слагаемые, содержащие Δm, получим, обозначив сумму внешних сил одной буквой $\overline{F}^e$.

$$(\overline{V} - \overline{U})\Delta m + m\Delta\overline{V} = \overline{F}^e \Delta t$$

Поделим все члены полученного уравнения на Δt и перенесем слагаемое, содержащее Δm в правую часть. В результате получим искомое уравнение Мещерского:

$$m \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \bar{F}^e + (\bar{U} - \bar{V}) \frac{\Delta m}{\Delta t} \qquad (2)$$

Однако, обычно его записывают в несколько другом, более удобном для применения виде, вводя так называемую относительную скорость $\bar{U}_0$, представляющую собой скорость присоединяемой массы Δm относительно массы m.

Очевидно, что $\bar{U} - \bar{V} = \bar{U}_0$.

После введения относительной скорости $\bar{U}_0$ получаем окончательно:

$$m \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \bar{F}^e + \bar{U}_0 \frac{\Delta m}{\Delta t} \qquad (3)$$

Более строго это уравнение получится путем перехода к пределу при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \frac{d\bar{V}}{dt}; \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$

В этом случае получим уравнение Мещерского в обычно рассматриваемом виде

$$m \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F}^e + \bar{U}_0 \frac{dm}{dt} \qquad (4)$$

Однако для применения к расчету реактивной силы достаточно и полученной нами элементарной формы.

3. Анализ уравнения Мещерского

1. Выясним размерность второго слагаемого правой части: в технической системе единиц получаем его размерность в кГ, в системе СИ — в ньютонах. Таким образом член $\bar{U}_0 \frac{\Delta m}{\Delta t}$ имеет размерность силы и называется реактивной силой $\bar{R}$, т. е.

$$\bar{R} = \bar{U}_0 \frac{\Delta m}{\Delta t} \qquad (5)$$

2. Рассмотрим, как направлено ускорение, создаваемое реактивной силой в случае присоединения или отбрасывания массы. Для удобства анализа примем, что внешние силы отсутствуют. В этом случае уравнение Мещерского можно записать в виде

$$m\bar{a} = \bar{U}_0 \frac{\Delta m}{\Delta t},$$

так как $\frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t}$ представляет собой ускорение $\bar{a}$.

а) К движущейся точке массы m присоединяется частица Δm. В этом случае $\frac{\Delta m}{\Delta t} > 0$, так как $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ можно рассматривать как скорость изменения массы.

Тогда $\bar{U}_0$ и $\bar{a}$ совпадают по направлению.

б) От движущейся точки отделяется масса Δm. Следовательно, $\frac{\Delta m}{\Delta t} < 0$ и ускорение направлено в сторону, обратную скорости движения частиц относительно массы m.

Этот случай наиболее интересен, так как имеет место при движении ракеты. В дальнейшем мы и будем его рассматривать.

3. Если масса движущегося тела не меняется, то $\frac{\Delta m}{\Delta t} = 0$ и уравнение Мещерского переходит в обычный 2-й закон Ньютона:

$$m \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \bar{F}^e.$$

4. Применение уравнения Мещерского к объяснению полета ракеты

Запишем уравнение (3) в виде

$$m \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \bar{F}^e + \bar{R} \qquad (6),$$

где $\bar{R}$ — реактивная сила, определяемая формулой $\bar{R} = \bar{U}_0 \frac{\Delta m}{\Delta t}$. Из уравнения (6) следует, что даже

если ракета движется вне поля внешних сил, т. е. $\bar{F}^c = 0$, она получает ускорение $\bar{a}$ за счет реактивной силы, зависящей только от относительной скорости истечения продуктов сгорания и скорости изменения массы.

Для современных ракет $\bar{U}_0$ имеет порядок 2—3 км/сек (для химических топлив) и при расчетах может приниматься постоянной (для установившегося режима работы двигателей).

Скорость уменьшения массы, т. е. $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ при этих условиях также можно считать постоянной и $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ обычно называют секундным расходом топлива *М*. Число *М* показывает, какое количество топлива сгорает при работе двигателей в 1 секунду.

Таким образом, величина реактивной силы целиком определяется скоростью истечения продуктов сгорания $\bar{U}_0$ и секундным расходом топлива $M = \frac{\Delta m}{\Delta t}$.

Рассмотрим характерный пример, из которого видно, какое огромное количество топлива сжигается современными ракетами для получения необходимой реактивной силы.

В журнале «Авиация и космонавтика» № 3 за 1965 г. опубликованы некоторые данные об американских стратегических ракетах. Одна из них, межконтинентальная баллистическая ракета «Титан», имеет длину 35 м, диаметр до 3,5 м. Вес ее на старте 100 тонн, суммарная тяга двигателей 160 тонн (реактивная сила).

Рассчитаем секундный расход топлива этой ракеты, приняв относительную скорость истечения газов $\bar{U}_0 = 2{,}5$ км/сек.

Дано:

$\bar{R} = 160000$ кГ ≈ 1570000 н.

$\bar{U}_0 = 2500$ м/сек.

Определить $M = \frac{\Delta m}{\Delta t}$.

Решение:

Применяем формулу реактивной силы $\bar{R} = \bar{U}_0 \frac{\Delta m}{\Delta t}$.

Отсюда $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{R}{U_0}$.

Подставляя данные, получим:

$$M = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{1570000 \frac{кг\ м}{сек^2}}{2500 \frac{м}{сек}} \approx 630 \frac{кг}{сек}.$$

Для сравнения можем привести некоторые данные нашего космического корабля «Восход» (данные были опубликованы в газетах).

Корабль «Восход» имел 7 двигателей суммарной тягой 650 тонн. Вес корабля без учета веса ракет-носителей 5320 кГ (о стартовом весе данных в печати не появлялось).

Однако при расчетах следует иметь в виду, что не все двигатели работают одновременно, так как для получения необходимых скоростей применяют многоступенчатые ракеты, впервые предложенные нашим замечательным ученым К. Э. Циолковским.

ЛИТЕРАТУРА:

1. С. М. Тарг. Краткий курс теоретической механики, физматгиз, М., 1963.

2. Г. Н. Савин, Н. А. Кильчевский, Т. В. Путята. Теоретическая механика, изд. тех. лит. УССР, Киев, 1963.

В. Ф. ЛЫСОВ.

ОРГАНИЗАЦИЯ И ПРОВЕДЕНИЕ СПЕЦПРАКТИКУМА ПО ФИЗИКЕ В ПЕДИНСТИТУТЕ

Спецпрактикум по физике для студентов старших курсов физико-математического факультета отделения физики пединститута является одной из завершающих практических дисциплин, способствующих подготовке учителей-физиков к практическому осуществлению задач политехнического обучения учащихся средней школы. Проведение этого практикума, по которому отсутствуют программы, должно базироваться на достижениях современной физики и техники, современных методов физического исследования, и соответствовать той роли, какую имеет физический эксперимент в преподавании физики в средней школе и физические измерения, являющиеся основой для понимания количественных законов физики.

Нами был поставлен спецпрактикум по полупроводникам и полупроводниковым приборам, которые в настоящее время занимают центральное место в физике твердого тела, являясь основой технического прогресса во многих отраслях техники. Организация такого спецпрактикума позволяет углубить и дополнить теоретические сведения, получаемые студентами в лекционном спецкурсе по полупроводникам, изучить методы исследования и измерения физических параметров полупроводниковых материалов и полупроводниковых приборов, изучить принципы создания установок для проведения экспериментальных исследований.

Нами поставлены следующие лабораторные работы:

1. Изучение полупроводниковых термочувствительных сопротивлений.
2. Изучение термоэлектрических явлений.
3. Изучение эффекта Холла в полупроводниках.

4. Изучение выпрямительных свойств германиевых и кремниевых диодов, стабилитронов, туннельных диодов.

5. Изучение фотоэлектрических свойств полупроводников.

6. Измерение удельного сопротивления полупроводника компенсационным методом и изучение распределения потенциала вдоль полупроводника.

7. Изучение работы полупроводникового триода.

8. Изучение полупроводников в школе.

9. Изучение сегнетоэлектриков.

10. Изучение ферритов.

11. Изучение работы фотодиодов и фототриодов.

12. Определение контактной разности потенциалов.

13. Изучение нелинейных полупроводниковых сопротивлений (варисторов).

В руководствах к лабораторным работам указывается литература для изучения теории и методики работы, программа работы, описание экспериментальной установки, методика проведения эксперимента, контрольные вопросы. К каждой лабораторной работе составлены программы для обучающей машины «Ласточка».

Проведение спецпрактикума по физике имеет ряд своих особенностей по сравнению с практикумом по общей физике:

1. Теория вопроса подробно изучается самостоятельно по указанной литературе. Студент должен научиться самостоятельно из рекомендованной литературы выбрать необходимый ему материал по данной теме работы.

2. В руководствах к работе не приводятся таблицы измерений и формулы ошибок. Студент должен самостоятельно составить таблицу измерений и оценить точность и реальность полученного экспериментального результата.

3. В руководствах предлагается произвести некоторые измерения разными методами, сравнить полученные результаты, выбрать наиболее рациональный и более точный метод измерения физических величин.

4. Большинство измерительных технических приборов и установок студенты самостоятельно осваивают согласно заводским инструкциям по их эксплуатации.

Лабораторные работы, как правило, выполняются индивидуально по графику цикличной системы, т. е. студент выполняет работы в круговом порядке. Занятия прово-

дятся по расписанию деканата или по свободному расписанию, когда каждый студент выбирает ему удобный день занятий в лаборатории и посещает лабораторию в этот день.

В лаборатории имеется почти вся справочная литература, научная и методическая литература по тематике лабораторных работ.

Студенты готовятся к выполнению лабораторных работ как дома, так и в лаборатории до выполнения работы.

При выполнении работы студент оформляет отчет (название работы, основные рабочие и принципиальные схемы, полученные результаты измерений и вычислений с оценкой точности полученных измерений и вычислений).

При приеме отчета по работе обращается внимание на следующее:

1. Знание физического смысла измеряемой величины, методики ее измерения, теории, на которой базируется работа.

2. Физические принципы устройства измерительного прибора, его принципиальная схема, умение пользоваться им.

3. Знание степени точности результата измерений и вычислений.

4. Применение изученного явления в науке, технике, народном хозяйстве.

В лаборатории спецпрактикума по полупроводникам используется обучающая машина «Ласточка». К ней составлены программы для всех работ.

Машина используется в основном в режиме «контроль» для проверки подготовленности к выполнению лабораторных работ, приема зачетов. Для слабо подготовленных студентов машина иногда включается в режим «самоконтроль», т. е. как обучающая.

Программы к каждой работе включают материал, который студенты должны самостоятельно проработать по рекомендованной литературе. Он располагается в логической последовательности и делится на небольшие порции. Контроль за усвоением каждой порции и осуществлялся нами на обучающей машине.

Применение таких программ для проверки усвоения студентами рекомендованной литературы стимулирует их самостоятельную работу, выявляет глубину изученного материала, сокращает время преподавателя. Преподава-

тель может больше времени уделить обучению студентов правильной методике проведения эксперимента и получению наиболее точных результатов, более глубокой проверке знаний студентов.

Однако применение обучающей машины ни в коем случае не исключает собеседования по отдельным вопросам методики выполнения эксперимента, обоснованию ответов, полученных результатов, обобщению изученного материала.

Э. М. БАШИРОВ

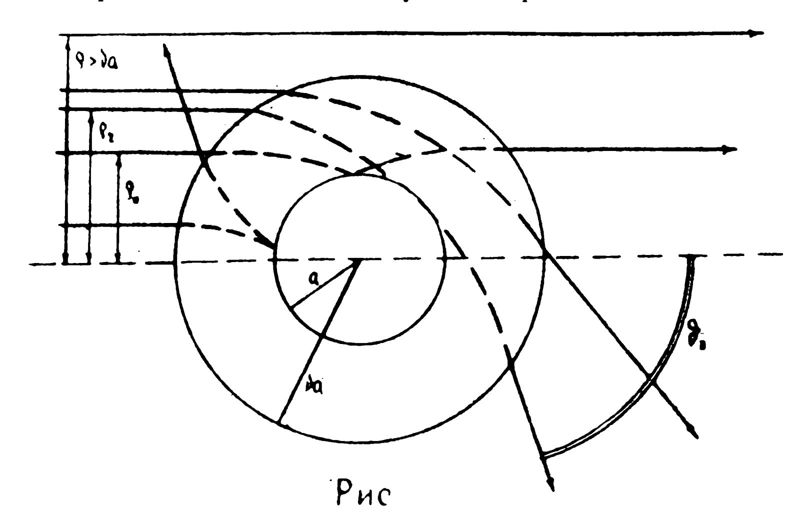
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЫ

При расчетах соударений атомов часто [2] для простоты потенциал задается в виде

$$V(r) = \begin{cases} \infty & (r < a) \\ -\varepsilon & (a \leqslant r \leqslant \nu a) \\ 0 & (r > \nu a) \end{cases}$$

Цель настоящей статьи: определить параметры ε, a и ν по экспериментальным данным рассеяния, где ε — глубина ямы, a — радиус отталкивающей стенки и ν — число, показывающее во сколько раз радиус области притяжения больше радиуса области отталкивания.

Предположим, что задачу можно решать классически.



Рис

На рисунке схематично показано, как происходит рассеяние. При $\rho > \nu a$ частица не рассеивается (классическая траектория представляет собой прямую). При $\rho_r \leqslant \rho \leqslant \nu a$ имеет место рассеяние в диапазоне углов (o, ϑ_r). При дальнейшем уменьшении прицельного параметра ρ частица натыкается на отталкивающий барьер и не может рассеяться на угол больший, нежели ϑ_r — так называемый радужный угол. [1] Траектория частицы разгибается. Проходится диапазон углов (o, ϑ_r). Рассеяние на о° происходит при некотором $\rho = \rho_0$. При изменении прицельного параметра в промежутке $o \leqslant \rho \leqslant \rho_0$ частица проходит диапазон углов (o,π). Таким образом область углов от 0 до ϑ_r проходится три раза, а от ϑ_r до π — один раз.

Угол 2φ, который описывает следящий вектор, когда частица движется из бесконечности и вновь удаляется в бесконечность, для различных диапазонов из-за наличия двух областей задания потенциала записывается по-разному, а именно:

$$\varphi_1 = \int\limits_{\nu a}^{\infty} \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}} + \int\limits_{r_0}^{\nu a} \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{E} - \frac{\rho^2}{r^2}}} =$$

$$= I_1 + I_2 \quad (\rho_r \leqslant \rho \leqslant \nu a)$$

$$\varphi_2 = \int\limits_{\nu a}^{\infty} \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}} + \int\limits_{a}^{\nu a} \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{E} - \frac{\rho^2}{r^2}}} =$$

$$= I_1 + I_3 \quad (0 \leqslant \rho \leqslant \rho_r)$$

r_0 — корень подкоренного выражения в I_2; он равен $r_0 = \rho \left(1 - \frac{\varepsilon}{E}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Отсюда можно найти и ρ_r при усло-

вии, что $r_0 = l$, то есть $\rho_r = a\left(1 + \frac{\varepsilon}{E}\right)^{\frac{1}{2}}$. Интегралы вычисляются элементарно. Для φ имеем:

$$\varphi_1 = \arcsin\frac{\rho}{\nu a} + \arccos\frac{\rho\sqrt{\mu}}{\nu a}\ (\rho_r \leqslant \rho \leqslant \nu a), \quad (1)$$

$$\varphi_2 = \arcsin\frac{\rho}{\nu a} + \arccos\frac{\rho\sqrt{\mu}}{\nu a} - \arccos\frac{\rho\sqrt{\mu}}{a}\ (O \leqslant \rho \leqslant \rho_r), \quad (2)$$

где $\mu = \frac{E}{E+\varepsilon}$ и E — энергия налетающей частицы. Отсюда легко получить выражение для радужного угла рассеяния ϑ_r, подставив в (1) (или в (2) значение ρ_r и учитывая, что в области притяжения $\varphi = \frac{\pi + \vartheta}{2}$,

$$\vartheta_r = -\pi + 2\arccos\frac{1}{\nu\sqrt{\mu}} + 2\arccos\frac{1}{\varkappa}. \quad (3)$$

Из (3) ясно видна зависимость радужного угла от энергии: с увеличением энергии налетающей частицы ϑ_r уменьшается.

Дифференциальное эффективное сечение для любых Θ трудно выразить в аналитическом виде (из-за сложной зависимости ρ от ϑ для $O \leqslant \rho \leqslant \rho_r$). Однако удается его записать для очень больших углов рассеяния.

Перенося в (2) первый член правой части налево и беря cos от обеих частей получившегося выражения, после несложных преобразований получаем следующее уравнение относительно $x = \frac{\rho}{\nu a}$

$$4\nu^2\mu^2x^6 - 4\nu\mu(\nu^2\mu + \mu + 1)x^5 + \mu[\nu^4 + 1 + 2\cdot(\nu^2 - \nu^2\mu + 1)\cos 2\varphi]x^4 + 4\nu\mu\sin\varphi(1 + \cos\varphi)x^3 - 2\sin^2\varphi(\nu^2\mu + \mu + 1)x^2 + \sin^4\varphi = O \quad (4)$$

Рассмотрим область малых ρ, т. е. рассеяние близкое к 180°. В этой области $x \ll 1$. Пренебрежем членами с x^n $|n > 2|$ по сравнению со свободным членом. Анализ показывает, что это приближение проходит для углов рассеяния от 177° до 180°.

(Анализ проведен для $\nu \sim 2$, $\mu \sim \frac{1}{2}$ [2]).

Таким образом для углов рассеяния от 177° до 180°, что соответствует прицельным параметрам, лежащим в области $0 \leqslant \rho \leqslant 0.02\,\nu a$, имеет место уравнение

$$2x^2 (\nu^2\mu + \mu + 1) = \sin^2 \varphi,$$

откуда (учитывая, что для отталкивания $\varphi = \frac{\pi - \vartheta}{2}$)

$$\frac{d\sigma}{d\vartheta} = \pi \left|\frac{d\rho^2}{d\vartheta}\right| = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\nu^2 a^2 \sin \vartheta}{\nu^2\mu + \mu + 1} \quad (177° \leqslant \vartheta < 180°). \tag{5}$$

Добавляя к уравнениям (3) и (5) еще выражение для полного сечения, которое для прямоугольной потенциальной ямы будет, очевидно, равно

$$\sigma = \pi (\nu a)^2, \tag{6}$$

получим систему трех уравнений (3), (5) и (6), решая которую относительно ε, a и ν, определяем искомые параметры.

Из-за важной роли радужного угла в предлагаемой методике энергия налетающей частицы должна быть достаточно мала $[E \leqslant 0 \cdot 1 eV]$.

В заключение выражаю глубокую благодарность Л. Г. Яковлёву за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. W. Ford, J. A. Wheeler. Ann. of Phys., 7, 259 (1959).
2. Д. Гиршфельдер, Ч. Кертисс, Р. Берд. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., ИЛ, 1961.

Е. Д. ВОРОБЬЕВ, Е. Г. КАЛАШНИКОВ

СВЯЗЬ ПАРАМЕТРОВ СВЯЗАННОЙ РЕАКТОРНОЙ СИСТЕМЫ С ДЕТАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НЕЙТРОННОГО ПОТОКА

Запишем двухгрупповые уравнения стационарного состояния отдельной сборки в виде:

$$\nabla D_{so} \nabla \varphi_s - \Sigma_{so} \varphi_s + \Sigma_{fo} \varphi_f = 0, \qquad (1)$$

$$\nabla D_{fo} \nabla \varphi_f - \Sigma_{fo} \varphi_f + \kappa_{10} \Sigma_{so} \varphi_s = 0.$$

Здесь D, Σ и к—функции координат, значок 0 означает, что эти параметры не возмущены. Значок s относится к величинам, связанным с описанием тепловой группы нейтронов, f — группы быстрых нейтронов. Смысл символов D, Σ, к и φ очевиден (1).

Под сборкой понимается ансамбль из размножающего нейтроны материала.

Пусть в сборку внесено возмущение путем малых изменений одного или нескольких параметров и одновременного сближения данной сборки с некоторой другой критической сборкой.

Изменения параметров могут иметь разные знаки и должны быть такими, чтобы система никогда не приближалась к состоянию мгновенной критичности. Сборка с возмущенными параметрами будет описываться уравнениями:

$$\nabla D_s \nabla \psi_s - \Sigma_s \psi_s + \Sigma_f \psi_f + S_s(r,t) = \frac{1}{v_s} \frac{\partial \psi_s}{\partial t}, \qquad (3)$$

$$\nabla D_f \nabla \psi_f - \Sigma_f \psi_f + (1-\beta) k_1 \Sigma_s \psi_s + \\ + \sum_i \lambda_i C_i + S_f(r,t) = \frac{1}{v_f} \frac{\partial \psi_f}{\partial t}, \qquad (4)$$

$$-\lambda_i C_i + \kappa_1 \Sigma_s \beta_i \psi_s = \frac{\partial C_i}{\partial t}. \qquad (5)$$

$$\text{Здесь } \psi_s = \psi_s(r,t),\ \psi_f = \psi_f(r,t),\ C_i = C_i(r,t);$$

$$D_s = D_{so}(r) + \delta D_s(r),\ D_f = D_{fo}(r) + \delta D_f(r),$$

$$\Sigma_s = \Sigma_{so}(r) + \delta\Sigma_s(r),\ \Sigma_f = \Sigma_{fo}(r) + \delta\Sigma_f(r), \quad (6)$$

$$\kappa_1 \Sigma_s = \kappa_{01} \Sigma_{so} + \delta(\kappa_1 \Sigma_s).$$

Взаимодействие, в общем случае, осуществляется как на тепловых, так и на быстрых нейтронах. Соотношение между числом тепловых и быстрых нейтронов, приходящих от второй сборки, зависит от характера среды, разделяющей сборки, и расстояния между сборками.

Поскольку экспериментально наблюдается единый установившийся период для всей системы, то поступаем так, как будто переменные разделяются:

$$\psi_s(r,t) = \varphi'_s(r)F_1(t),$$

$$\psi_f(r,t) = \varphi_f'(r)F_1(t), \quad (7)$$

$$C_i(r,t) = C_i(r) f_{i1}(t).$$

Считаем также, что вторая сборка создает в первой нейтронные источники, распределение которых описывается функцией $S_s(r)$ для тепловых нейтронов и функцией $S_f(r)$ для быстрых, причем во времени интенсивность источников меняется так же, как и мощность во второй сборке, но с некоторым запаздыванием τ, т. е.

$$S_s(r,t) = S_s(r) F_2(t - \tau_s), \quad (8)$$

$$S_f(r,t) = S_f(r) F_2(t - \tau_f). \quad (9)$$

Запаздывание связано с распространением нейтронной волны от одной сборки к другой и различно для быстрой и тепловой групп нейтронов [2].

Нам понадобятся также уравнения для сопряженных потоков φ^*_s и φ^*_f:

$$\nabla D_{so} \nabla \varphi^*_s - \Sigma_{so} \varphi^*_s + \kappa_{10} \Sigma_{so} \varphi_f^* = 0, \quad (10)$$

$$\nabla D_{fo} \nabla \varphi_f^* - \Sigma_{fo} \varphi_f^* + \Sigma_{fo} \varphi_s^* = 0. \quad (11)$$

а) Умножим теперь уравнение (3) на φ_s^*, а (10) на $\varphi_s' F_1(t)$, проинтегрируем по объему первой сборки и вычтем друг из друга.

б) Умножим также (4) на φ_f^*, а (11) на $\varphi_i' F_1(t)$, проинтегрируем по объему первой сборки и вычтем друг из друга.

Сложим теперь результаты операций (а) и (б) и разделим на

$$\int_{V_1} \kappa_1 \Sigma_s \varphi_f^* \varphi_s \, dv.$$

В результате получим:

$$\frac{dF_1(t)}{dt} = \frac{\rho_1 - \beta_1^*}{l_1^*} F_1(t) + \sum_i \lambda_i \bar{f}_{i1}(t) + \frac{\gamma_{12}}{l_1^*} F_2(t - \tau_{12}), \qquad (12)$$

$$\frac{d\bar{f}_{i1}(t)}{dt} = -\lambda_i \bar{f}_{i1}(t) + \frac{\beta_{i1}}{l_1^*} F_i(t), \text{ где} \qquad (13)$$

$$\rho = \int_{V_1} [\delta(\kappa_1 \Sigma_s) \varphi_f^* \varphi_s' - \delta \Sigma_s \varphi_s^* \varphi_s' - \delta \Sigma_f \varphi_f^* \varphi_f' + \delta \Sigma_f \varphi_s^* \varphi_f' - \qquad (14)$$

$$- \delta D_s \nabla \varphi_s^* \nabla \varphi_s' - \delta D_f \nabla \varphi_f^* \nabla \varphi_f'] \, dv \Big/ \int_{V_1} \kappa_1 \Sigma_s \varphi_f^* \varphi_s \, dv,$$

$$l_1^* = \int_{V_1} \left[\frac{\varphi_s^* \varphi_s'}{v_s} + \frac{\varphi_f^* \varphi_f'}{v_f} \right] dv \Big/ \int_{V_1} \kappa_1 \Sigma_s \varphi_f^* \varphi_s \, dv, \qquad (15)$$

$$\beta_1^* = \beta_1 \int_{V_1} \kappa_1 \Sigma_s \varphi_f^* \varphi_s' \, dv \Big/ \int_{V_1} \kappa_1 \Sigma_s \varphi_f^* \varphi_s \, dv, \qquad (16)$$

$$\bar{f}_{i1}(t) = f_{i1}(t) \frac{h_{i1}}{l_1^*}, \qquad \text{где} \qquad (17)$$

$$h_{i1} = \frac{C_{i1}(r)}{k_1 \Sigma_s \varphi_s(r)} = \text{const};$$

$$\gamma_{12} = [\int_{V_1} S_s(r) \varphi_s^* \, dv + \int_{V_1} S_f(r) \varphi_f^* \, dv] /$$

$$\int_{V_1} \kappa_1 \Sigma_s \varphi_f^* \varphi_s \, dv, \qquad (18)$$

$$\tau_{12} = [\tau_s \int\limits_{V_1} S_s(r)\,\varphi_s^*\,dv + \tau_f \int\limits_{V_1} S_f(r)\,\varphi_f^*\,dv] / \left[\int\limits_{V_1} S_s(r)\,\varphi_s^*\,dv + \int\limits_{V_1} S_f(r)\,\varphi_f^*\,dv\right] \quad (19)$$

Конкретная форма функций $S_s(r)$ и $S_f(r)$ зависит от выбора ядер замедления и диффузии.

Повторяя аналогичные выкладки для второй сборки, можно получить вторую пару уравнений. Вводя привычные обозначения $n_1(t) \to F_1(t)$, $C_{i1}(t) \to \overline{f_{i1}}(t)$, $l_1 \to l_1^*$; $\beta_1 \to \beta_1^*$, запишем систему уравнений кинетики двойной связанной системы в окончательном виде:

$$\frac{dn_1(t)}{dt} = \frac{\rho_1 - \beta_1}{l_1} n_1(t) + \sum_i \lambda_i C_{i1}(t) + \frac{\gamma_{12}}{l_1} n_2(t - \tau_{12}),$$

$$\frac{dn_2(t)}{dt} = \frac{\rho_2 - \beta_2}{l_2} n_2(t) + \sum_i \lambda_i C_{i2}(t) + \frac{\gamma_{21}}{l_2} n_1(t - \tau_{21}),$$

$$\frac{dC_{i1}(t)}{dt} = -\lambda_i C_{i1}(t) + \frac{\beta_{i1}}{l_1} n_1(t), \quad (20)$$

$$\frac{dC_{i2}(t)}{dt} = -\lambda_i C_{i2}(t) + \frac{\beta_{i2}}{l_2} n_2(t).$$

Здесь $n_1(t)$ и $n_2(t)$ — средняя плотность нейтронов (или общая мощность сборок) в первой и второй сборках соответственно.

$C_{i1}(t)$ и $C_{i2}(t)$ — средние плотности (или средние мощности источников) предшественников запаздывающих нейтронов i-й группы в первой и второй сборках, соответственно.

γ_{12} и γ_{21} — коэффициенты связи; в общем случае $\gamma_{12} \neq \gamma_{21}$.

l_1 и l_2 — среднее время цикла генерации мгновенных нейтронов.

β_1 и β_2 — эффективная доля запаздывающих нейтронов.

Заметим, что знаменатель в (14) — (18) может быть выбран произвольно. Используемая здесь форма знаменателя выбрана таким образом, что при $\gamma \to 0$ получается

обычное определение реактивности, например, (14) дает $\rho \sim \delta\kappa_1/\kappa_1$ [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Вейнберг А. и Вигнер Е. Физическая теория ядерных реакторов, ИЛ, 1961.

2. Boynton A. and Uhrig R. Nucl. Sci. and Eng., 18, 220—229 (1964).

3. Гарабедиан Х. А. Кинетика активной зоны реактора. В сб. «Теория ядерных реакторов», ред. Биркгоф Г. и Вигнер Е., М., 1963.

Е. Д. ВОРОБЬЕВ, Е. Г. КАЛАШНИКОВ

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КИНЕТИКИ ДВОЙНОЙ СВЯЗАННОЙ РЕАКТОРНОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ СКАЧКА РЕАКТИВНОСТИ

Точное решение в аналитическом виде уравнений, установленных в предыдущей работе [1], можно получить только для одного случая-скачка реактивности. Здесь мы приведем и проанализируем решение для случая, когда реактивность вводится только в одну сборку.

В дальнейшем нам понадобится условие критичности. Его легко получить из уравнений кинетики, если положить

$$\rho_1 = \rho_{01}, \ \rho_2 = \rho_{02},$$

где ρ_{01} и ρ_{02} — значения подкритичностей сборок, обеспечивающие точно критическое состояние системы.

В этом случае уравнения кинетики сводятся к

$$\rho_{01} n_{01} = -\gamma_{12} n_{02}, \qquad (1)$$

$$\rho_{02} n_{02} = -\gamma_{21} n_{01}, \qquad (2)$$

где n_{01} и n_{02} стационарные средние плотности нейтронов в сборках. Перемножая (1) на (2), получим условие критичности двойной связанной системы:

$$\rho_{01} \rho_{02} = \gamma_{12} \gamma_{21}. \qquad (3)$$

Пусть теперь в критическую систему вводится скачком положительная реактивность ρ в области первой сборки, т. е. в уравнениях кинетики надо положить

$$\rho_1 = \rho_{01} + \rho,$$
$$\rho_2 = \rho_{02}. \qquad (4)$$

Начальные условия задаются соотношениями:

$$\lambda_i C_{i1}(t) = \frac{\beta_{i1}}{l_1} n_1(t) = \frac{\beta_{i1}}{l_1} n_{10} \quad \text{для} \quad t < 0, \tag{5}$$

$$\lambda_i C_{i2}(t) = \frac{\beta_{i2}}{l_2} n_2(t) = \frac{\beta_{i2}}{l_2} n_{20} \text{ для } t < \tau_{21}.$$

Решение уравнений кинетики для условий (4) и (5) может быть получено в виде:

$$n_1(t) = n_{10} \sum_{j}^{I_1 + I_2 + 2} A_1(\rho_j) \exp(\rho_j t),$$

$$n_2(t) = n_{20} \sum_{j}^{I_1 + I_2 + 2} A_2(\rho_j) \exp(\rho_j t), \tag{6}$$

где I_1 — число групп запаздывающих нейтронов в первой сборке,

I_2 — то же во второй. В дальнейшем мы будем считать

$$I_1 = I_2 = I$$

Pj — есть простые корни характеристического уравнения:

$$\rho = l_1 p - \rho_{01} \sum_{i=1}^{I} \frac{p\,\beta_{i1}}{p + \lambda_i} -$$

$$- \rho_{01}\,\rho_{02} \exp\left[-(\tau_{12} + \tau_{21})\,p\right] \Big/ \left[l_2 p - \rho_{02} + \sum_{i=1}^{I} \frac{p\,\beta_{j2}}{p + \lambda_i} \right]. \tag{7}$$

Заметим, что в (7) с помощью условия критичности (3) удалось избавиться от коэффициентов связи, так что в решениях они не появятся.

Далее,

$$A_1(p_j) = \left\{ l_1 + \sum_{i=1}^{I} \frac{\beta_{i1}}{p_j + \lambda_i} - B_1\,\rho_{01} \exp\left[-(\tau_{12} + \tau_{21})\,p_j\right] \right\} \Bigg/$$

$$\left\{ l_1 + \sum_{i=1}^{I} \frac{\lambda_i\,\beta_{i1}}{(p_j + \lambda_i)^2} + \rho_{01}\,\rho_{02} \exp\left[-(\tau_{12} + \tau_{21})\,p_j\right] C_1 \cdot \right\}, \tag{8}$$

где

$$B_1 = \left[l_2 + \sum_{i=1}^{I} \frac{\beta_{i2}}{p_j + \lambda_i} \right] \Big/ \left[l_2 p_j - \rho_{02} + \sum_{i=1}^{I} \frac{p_j \beta_{i2}}{p_j + \lambda_i} \right],$$

$$C_1 = \left\{ (\tau_{12} + \tau_{21}) \left(l_2 p_j - \rho_{02} + \sum_{i=1}^{I} \frac{p_j \beta_{i2}}{p_j + \lambda_i} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(l_2 + \sum_{i=1}^{I} \frac{\lambda_i \beta_{i2}}{(p_j + \lambda_i)^2} \right) \right\} \Big/ \left(l_2 p_j - \rho_{02} + \sum_{i=1}^{I} \frac{p_j \beta_{i2}}{p_j + \lambda_i} \right)^2, \quad \text{а}$$

$$A_2(p_j) = \left\{ l_2 + \sum_{i=1}^{I} \frac{\beta_{i2}}{p_j + \lambda_i} - B_2 \rho_{02} \right\} \exp(-\tau_{21} p_j) \Big/ \tag{9}$$

$$\left\{ l_2 + \sum_{i=1}^{I} \frac{\lambda_f \beta_{i2}}{(p_j + \lambda_i)^2} + \rho_{01} \rho_{02} \exp\left[-(\tau_{12} + \tau_{21}) p_j\right] C_2 \right\},$$

где

$$B_2 = \left[l_1 + \sum_{i=1}^{I} \frac{\beta_{i1}}{p_j + \lambda_i} \right] \Big/ \left[l_1 p_j - \rho_{01} - \rho + \sum_{i=1}^{I} \frac{p_j \beta_{i1}}{p_j + \lambda_i} \right],$$

$$C_2 = \left\{ (\tau_{12} + \tau_{21}) \left(l_1 p_j - \rho_{01} - p + \sum_{i=1}^{I} \frac{p_j \beta_i}{p_j + \lambda_{i1}} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(l_1 + \sum_{i=1}^{I} \frac{\lambda_i \beta_{i1}}{(p_j + \lambda_i)^2} \right) \right\} \Big/ \left(l_1 p_j - \rho_{01} - \rho + \sum_{i=1}^{I} \frac{p_j \beta_{i1}}{p_j + \lambda_i} \right)^2.$$

Если $\rho > 0$, т. е. система надкритична, то один из корней уравнения (7) $P_0 = \frac{1}{T}$ будет положительным. Другие корни отрицательные и соответствующие им члены в решении (6) будут затухать со временем. Всего корней $2(I+1)$.

Если $\rho < 0$, то все корни отрицательные, наконец, если $\rho = 0$, то один корень равен нулю, а все остальные— отрицательные.

Сравнивая выражения (8) и (9) с аналогичным выражением для коэффициентов решения при скачке реактивности в однозонном реакторе [2]:

$$A(P_j) = \left(1 - \sum_{i=1}^{I} \frac{\beta_i}{P_j + \lambda_i}\right) \Big/ \left(1 - \sum_{i=1}^{I} \frac{\lambda_i \beta_i}{(P_j + \lambda_i)^2}\right), \tag{10}$$

легко заметить, что влияние другой сборки учитывается добавлением третьего члена в числителе и знаменателе формул (8) и (9).

В решении можно различить несколько стадий: «мгновенный скачок», переходный режим и установившееся экспоненциальное изменение. Мгновенный скачок связан с наибольшим отрицательным корнем P_- уравнения (7).

Могут встретиться две ситуации.

(1). Если $|P_-| \gg \lambda_i$, что всегда выполняется, но $|P_-| \ll \frac{1}{\tau_{12} + \tau_{21}}$, то

$$\frac{1}{P} \simeq -\left(l_1 + l_2 \frac{\rho_{01} + \rho - \beta_1}{\rho_{02} - \beta_2}\right) \Big/ \left(-\rho + \beta_1 \frac{\rho_{02}}{\rho_{02} - \beta_2} + \beta_2 \frac{\rho_{01} - \beta_1}{\rho_{02} - \beta_2}\right). \tag{11}$$

Для однозонного реактора аналогичное выражение имеет вид

$$\frac{1}{P} \simeq \frac{1}{-\rho + \beta}.$$

(2). Если $|P_-| \gg \lambda_i$ и $|P_-| \gg \frac{1}{\tau_{12} + \tau_{21}}$, то простого выражения для P_- из трансцендентного уравнения (7) получить нельзя.

После скачкообразного изменения реактивности от 0 до ρ нейтронный поток за время $\sim 1/|P_-|$ изменяется от n_{01} до $n_1 = n_{01}[1 - A_1(P_-)]$ и от

n_{02} до $n_2 = n_{02}[1 - A_2(P_-)]$.

После скачка наступает переходная стадия, при которой отношения C_i к n изменяются от величин, определяемых начальными условиями (5) и характеризующими стационарный режим при нулевой реактивности до величин, соответствующих установившемуся режиму при реактивности ρ. Можно считать, что переходные процессы затухают за время порядка нескольких установившихся периодов $1/P_0$.

Установившийся период оценивается формулой

$$\frac{1}{P_0} \simeq \left\{ l_1 + l_2 \frac{\rho_{01} + \rho}{\rho_{02}} + \beta_1 \bar{t}_1 + \beta_2 \bar{t}_2 \frac{\rho_{01} + \rho}{\rho_{02}} \right\} \Big/ \rho. \qquad (12)$$

Для однозонного реактора аналогичное выражение имеет вид

$$\frac{1}{P_0} \simeq (l + \beta\, \bar{t}\,)/\, \rho.$$

Здесь и в (12) $\beta \bar{t} = \sum\limits_i \beta_i / \lambda_i$. Т. о., первая сборка при вводе реактивности ρ ведет себя так, как будто время жизни мгновенных нейтронов в этой сборке увеличилось на $l_2 \dfrac{\rho_{01} + \rho}{\rho_{02}}$; а время жизни запаздывающих нейтронов в этой сборке увеличилось на $\beta_2 \bar{t}_2 \dfrac{\rho_{01} + \rho}{\rho_{02}}$.

Заметим еще, что стадия скачка и стадия переходного режима усложняются явлениями запаздывания.

Так из (6) и (8) видно, что решение для первой сборки состоит из двух частей: изменение потока, связанное со свойствами первой сборки, проявляется сразу же в момент возмущения и описывается первой суммой членов правой части (8).

Изменение, связанное с влиянием второй сборки, проявляется через время $(\tau_{12}+\tau_{21})$.

Поток во второй сборке, после «мгновенного» ввода реактивности в первую, изменяется с запозданием τ_{21} в сравнении с основным изменением в первой.

Поскольку в решениях для $n_1(t)$ и $n_2(t)$ в показателях экспонент стоят корни одного и того же характери-

стического уравнения, то при $t \gg (\tau_{12}+\tau_{21})$ изменения потоков в обеих сборках будут происходить одинаковым образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьев Е. Д., Калашников Е. Г. Связь параметров связанной реакторной системы с детальным распределением нейтронного потока. В данном сборнике.

2. Судек Г. Проблемы кинетики реактора. В сб. «Теория ядерных реакторов», ред. Биркгоф Г. и Вигнер Е., М., 1963.

Е. Д. ВОРОБЬЕВ, Е. Г. КАЛАШНИКОВ

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КИНЕТИКИ ДВОЙНОЙ СВЯЗАННОЙ РЕАКТОРНОЙ СИСТЕМЫ

Подавляющее большинство задач реакторной кинетики может быть решено только приближенными методами. Здесь мы попытаемся найти решение уравнений кинетики двойной связанной системы [1] методом, который применялся Аккези [2] при анализе кинетики однозонного реактора.

Для простоты ограничимся одной группой запаздывающих нейтронов. Члены с запаздыванием разложим в степенной ряд

$$n(t-\tau) = n(t) - \tau \dot{n}(t) + \ldots$$

и оборвем его на втором члене. Это, очевидно, можно сделать для $t \ll \tau$ и даже для $t \simeq \tau$, если

$$\tau |\dot{n}(t)| \ll n(t).$$

Тогда исходные уравнения будут иметь вид:

$$\dot{n}_1(t) = \frac{\rho_1 - \beta_1}{l_1} n_1(t) + \frac{\gamma_{12}}{l_1} n_2(t) - \tau_{12} \frac{\gamma_{12}}{l_1} \dot{n}_2(t) + \lambda C_1(t),$$

$$\dot{n}_2(t) = \frac{\rho_2 - \beta_2}{l_2} n_2(t) + \frac{\gamma_{21}}{l_2} n_1(t) - \tau_{21} \frac{\gamma_{21}}{l_2} \dot{n}_1(t) + \lambda C_2(t), \tag{1}$$

$$\dot{C}_1(t) = -\lambda C_1(t) + \frac{\beta_1}{l_1} n_1(t),$$

$$\dot{C}_2(t) = -\lambda C_2(t) + \frac{\beta_2}{l_2} n_2(t).$$

Здесь точки означают дифференцирование по t. Пусть

в одной из сборок двойной системы, скажем первой, реактивность меняется по произвольному закону:

$$\rho_1 = \rho_{01} + \rho_0 + \rho z(t), \text{ а}$$
$$\rho_2 = \rho_{02}. \quad (2)$$

Здесь ρ_0 — постоянная часть избыточной реактивности в первой сборке;

$Z(t)$ — функция, характеризующая временную зависимость реактивности, а

ρ — амплитуда изменений реактивности, причем будем пытаться искать решение в виде:

$$n_1(t) = \exp\left(\int_0^t m(t)\,dt\right),$$
$$C_1(t) = P_1(t)\exp\left(\int_0^t m(t)\,dt\right),$$
$$n_2(t) = q(t)\exp\left(\int_0^t m(t)\,dt\right), \quad (3)$$
$$C_2(t) = P_2(t)\exp\left(\int_0^t m(t)\,dt\right),$$

Подставим выражения (3) в уравнение (1):

$$l_1 m(t) = \rho_{01} + \rho_0 + \rho z(t) - \beta_1 + \gamma_{12} q(t) - \tau_{12}\gamma_{12}\dot{q}(t) -$$
$$- \tau_{12}\gamma_{12} q(t) m(t) + \lambda l_1 p_1(t),$$
$$l_2\dot{q}(t) + l_2 q(t) m(t) = (\rho_{02} - \beta_2) q(t) + \gamma_{21} - \tau_{21}\gamma_{21} m(t) +$$
$$+ \lambda l_2 p_2(t), \quad (4)$$
$$l_1\dot{p}_1(t) + l_1 p_1(t) m(t) = -\lambda l_1 p_1(t) + \beta_1,$$
$$l_2\dot{p}_2(t) + l_2 p_2(t) m(t) = -\lambda l_2 p_2(t) + \beta_2 q(t)$$

Положим, что $m(t)$, $q(t)$, $P_1(t)$ и $P_2(t)$ можно разложить в ряд по степеням ρ:

$$m(t) = m_0 + \rho m_1(t) + \rho^2 m_2(t) + \ldots,$$
$$q(t) = q_0 + \rho q_1(t) + \rho^2 q_2(t) + \ldots,$$
$$p_1(t) = p_{10} + \rho p_{11}(t) + \rho^2 p_{12}(t) + \ldots, \quad (5)$$
$$p_2(t) = p_{20} + \rho p_{21}(t) + \rho^2 p_{22}(t) + \ldots.$$

Здесь $m_i(t)$, $q_i(t)$, $P_{1i}(t)$ и $P_{2i}(t)$ — ограниченные функции времени. Это требование обеспечивает сходимость рядов.

m_0, P_{10}, P_{20} и q_0 — постоянные.

Подставим разложения (5) в уравнения системы (4) и уравняем коэффициенты при одинаковых степенях ρ. Тогда для нулевой степени ρ имеем:

$$m_0 l_1 = \rho_{01} + \rho_0 - \beta_1 + \gamma_{12} q_0 - \tau_{12}\gamma_{12} q_0 m_0 + \lambda l_1 P_{10},$$
$$m_0 l_2 = (\rho_{02} - \beta_2) q_0 + \gamma_{21} - \tau_{21}\gamma_{21} m_0 + \lambda l_2 P_{20},$$
$$m_0 l_1 P_{10} = -\lambda l_1 P_{10} + \beta_1, \tag{6}$$
$$m_0 l_2 P_{20} = -\lambda l_2 P_{20} + \beta_2 q_0.$$

Откуда

$$P_{10} = \frac{\beta_1}{l_1}\frac{1}{m_0+\lambda}, \qquad P_{20} = q_0\frac{\beta_2}{l_2}\frac{1}{m_0+\lambda}, \tag{7}$$

а

$$q_0 = \left(m_0 l_1 - \rho_{01} - \rho_0 + \beta_1 - \frac{\lambda\beta_1}{m_0+\lambda}\right) \Big/ \gamma_{12}(1 - \tau_{12} m_0) \tag{8}$$

или

$$q_0 = \gamma_{21}(1 - \tau_{21} m_0) \Big/ \left(m_0 l_2 - \rho_{02} + \beta_2 - \frac{\lambda\beta_2}{m_0+\lambda}\right) \tag{8^1}$$

Исключая q_0 из (8) и (8^1), получим:

$$\rho_0 \cdot A(m_0) = 1, \tag{9}$$

где

$$A^{-1}(m_0) = m_0 l_1 - \rho_{01} + \frac{\beta_1 m_0}{m_0+\lambda} -$$
$$- [\rho_{01}\rho_{02}(1 - \tau_{12} m_0)(1 - \tau_{21} m_0)] \Big/ \left(m_0 l_2 - \rho_{02} + \frac{\beta_2 m_0}{m_0+\lambda}\right). \tag{10}$$

Уравнение (9) есть модификация уравнения обратных часов для двойной системы [3], а (10) есть передаточная функция для такой системы, как мы ее определяем в линейной теории.

Для первой степени имеем:

$$l_1 m_1(t) = z(t) + \gamma_{12} q_1(t) - \tau_{12}\dot{q}_1(t) - \tau_{12}\gamma_{12} m_0 q_1(t) -$$
$$- \tau_{12}\gamma_{12} q_0 m_1(t) + \lambda l_1 p_{11}(t),$$

$$l_2 \dot{q}_1(t) + l_2 m_0 q_1(t) + l_2 q_0 m_1(t) = (\rho_{02} - \beta_2) q_1(t) -$$
$$- \tau_{21}\gamma_{21} m_1(t) + \lambda l_2 p_{21}(t), \qquad (11)$$

$$l_1 \dot{p}_{11}(t) + l_1 m_0 p_{11}(t) + l_1 p_{10} m_1(t) = -\lambda l_1 p_{11}(t),$$

$$l_2 \dot{p}_{21}(t) + l_2 m_0 p_{21}(t) + l_2 p_{20} m_1(t) = -\lambda l_2 p_{21}(t) + \beta_2 q_1(t).$$

Эти уравнения можно проинтегрировать с помощью преобразований Лапласа. Членами, содержащими $\tau\,\gamma$, будем в дальнейшем пренебрегать. Можно показать, что они меньше других членов уравнений (11).

$$l_1 m_1(s) = z(s) + \gamma_{12} q_1(s) + \lambda l_1 p_{11}(s),$$
$$l_2 s q_1(s) + l_2 m_0 q_1(s) + l_2 q_0 m_1(s) =$$
$$= (\rho_{02} - \beta_2) q_1(s) + \lambda l_2 p_{21}(s), \qquad (12)$$
$$l_1 s p_{11}(s) + l_1 m_0 p_{11}(s) + l_1 p_{10} m_1(s) = -\lambda l_1 p_{11}(s),$$
$$l_2 s p_{21}(s) + l_2 m_0 p_{21}(s) + l_2 p_{20} m_1(s) = -\lambda l_2 p_{21}(s) + \beta_2 q_1(s).$$

Здесь $m_1(s), p_{11}(s), p_{21}(s)$ и $q_1(s)$ изображения функций $m_1(t)$, $p_{11}(t)$, $p_{21}(t)$ и $q_1(t)$, соответственно.

После несложных преобразований получим:

$$m_1(s) = K(s, m_0) \cdot Z(s), \qquad (13)$$

где

$$K^{-1}(s, m_0) = l_1 - \frac{\lambda}{m_0 + \lambda}\,\frac{\beta_1}{s + m_0 + \lambda} -$$
$$- \rho_{01}\rho_{02}\left(l_2 + \frac{\lambda}{m_0 + \lambda}\,\frac{\beta_2}{s + m_0 + \lambda}\right)\Big/$$
$$\left[l_2(s + m_0) - \rho_{02} + \beta_2 - \frac{\lambda\beta_2}{s + m_0 + \lambda}\right]$$
$$\left(m_0 l_2 - \rho_{02} + \frac{m_0\beta_2}{m_0 + \lambda}\right). \qquad (14)$$

Заметим, что

$$K^{-1}(o_1 m_0) = e_1 + \frac{\lambda\beta_1}{(m_0+\lambda)^2} -$$

$$-\rho_{01}\rho_{02}\left(l_2 + \frac{\lambda\beta_2}{(m_0+\lambda)^2}\right)\Big/\left(l_2 m_0 - \rho_{02} + \frac{m_0\beta_2}{m_0+\lambda}\right)^2, \tag{14$^{\text{I}}$}$$

а
$$K^{-1}(o_1 o) = \overline{l_1} + \overline{l_2}\,\frac{\rho_{01}}{\rho_{02}}, \tag{14$^{\text{II}}$}$$

где

$$\overline{l_1} = l_1 + \frac{\beta_1}{\lambda},$$

а
$$\overline{l_2} = l_2 + \frac{\beta_2}{\lambda}.$$

Подобным же путем можно получить выражения для $m_2(t)$ и т. д., но вычисления, к сожалению, становятся очень громоздкими и рассматриваться здесь не будут.

Рассмотрим теперь несколько конкретных примеров.

I. Ступенчатая функция

Если в уравнении (2) $\rho = 0$, а $\rho_0 \neq 0$ — получаем скачок реактивности и с помощью уравнения (9) получаем точное решение для этого случая:

$$n_1(t) = \sum_i C_i \exp(m_{0i} t), \tag{15}$$

как в работе [3]. Решение можно представить и в другом виде. Пусть $\rho_0 = 0$, $Z(t) = 1$. Можно показать [4], что

$$m_1(t) = K(o_1 m_0).$$

Тогда, в первом приближении, общее решение будет

$$n_1(t) = C_0 \exp(\rho K(0_1 0)t) + \tag{16}$$

$$+ \sum_i C_i \exp\{[m_{0i} + \rho K(0_1 m_{0i})]t\}, \tag{17}$$

где C_0 и C_i — постоянные интегрирования, которые дол-

жны быть определены из начальных условий для $n_1(t)$, $n_2(t)$, $C_1(t)$ и $C_2(t)$, а m_{oi} — отрицательные корни уравнения (9).

Можно заметить, что определяющим в решении (17) будет первый член. Т. о., в установившемся режиме первая сборка ведет себя так, как будто общее время жизни нейтронов, согласно (14^{11}) увеличилось на $\overline{l}_2 \frac{\rho_{01}}{\rho_{02}}$.

2. Линейная функция

Если предыдущую задачу можно точно решить прямым методом и ее решение приведено здесь лишь для сравнения, то эта задача не тривиальна.

Пусть

$$\rho_{\text{избыт.}} = \rho_0 + \rho t,$$

т. е.

$$z(t) = t.$$

В первом приближении решение может быть получено из (13) подстановкой $z(s) = 1/s^2$:

$$n_1(t) = \sum_i C_i \exp\left[m_{oi} t + \frac{1}{2} \rho K(o_1 m_{oi}) t^2 \right], \qquad (18)$$

здесь m_{oi} — все (четыре) корни уравнения (9).

Очевидно, это уравнение справедливо в течение ограниченного промежутка времени, поскольку $Z(t)$ не ограничено во времени.

3. Синусоидальная функция

Пусть $\rho_{\text{избыт.}} = \rho_0 + \rho \dfrac{\exp(j\omega t)}{j}$.

Физический смысл имеет только действительная часть этого выражения.

Тогда $m_1(s) = -K(s_1 m_0) \dfrac{j}{s - j\omega} \simeq -K(j\omega, m_0) \dfrac{j}{s - j\omega}$.

Отсюда

$$m_1(t) = -K(j\omega, m_0)\, j \exp(j\omega t)$$

$$\text{и} \int_0^t m_1(t)\,dt = - \int_0^t K(j\omega, m_0)\, j \exp(j\omega t)\,dt =$$

$$- K(j\omega, m_0) \exp(j\omega t).$$

Введем обозначение

$$\frac{1}{j\omega} K(j\omega, m_0) = Z(j\omega, m_0).$$

Тогда

$$n_1(t) = \sum_i C_i \exp\left\{m_{0i} t + \rho\,|Z(j\omega, m_0)|\,\mathrm{Sin}(\omega t + \varphi_i)\right\},$$

где φ_i фазовый угол $z(j\omega, m_{0i})$.

Если система критична, $m_{00} = 0$, а m_{0i} дают затухающие члены и

$$n_1(t) = C_0 \exp\left[\rho\,|Z(j\omega)|\,\mathrm{Sin}(\omega t + \varphi_0)\right]. \qquad (19)$$

При $\rho|Z(j\omega)| < 1$

$$n_1(t) \simeq C_0\left[1 + \rho|Z(j\omega)|\,\mathrm{Sin}(\omega t + \varphi_0)\right]. \qquad (19^1)$$

Здесь $|Z(j\omega)|$ играет роль передаточной функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьев Е. Д., Калашников Е. Г. Связь параметров связанной реакторной системы с детальным распределением нейтронного потока. В данном сборнике.

2. Ziya Akkasu, Nucl. Sei. and Eng., 3, 453—467 (1958).

3. Воробьев Е. Д., Калашников Е. Г. Решение уравнений кинетики двойной связанной реакторной системы для скачка реактивности. В данном сборнике.

4. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. «Наука», 1965.

СОДЕРЖАНИЕ

Сдано в набор 1/VIII 1966 г. Подписано к печати 12/IV 1967 года.
Формат бумаги $60 \times 84^{1}/_{16}$. Объем: 3,25 печ. л.
ЗМ00078. Заказ 6681. Тираж 600 экз. Цена 22 коп.
г. Ульяновск, типография облуправления по печати.